Conjuntos
LISTA 2 - GABARITO

1. Dados os conjuntos A = $\{1,2,\{1\}\}$, B = $\{1,3,\phi\}$ e C = $\{3,4,\{3,4\},\{\phi\}\}$, assinale verdadeiro (V) ou falso (F) nas afirmativas abaixo:

(**V**) $1 \subset A$ (**V**) $1 \in A$ (**V**) $\{1\} \subset A$ (**V**) $\{1\} \in A$ (**F**) $\{1,2\} \in A$ (**V**) $\{1,2\} \subset A$
(**F**) $\{1,3\} \in B$ (**V**) $\{1,3\} \subset B$ (**V**) $\{3,4\} \subset C$ (**V**) $\phi \in B$ (**V**) $\{3,4\} \in C$ (**V**) $\phi \subset B$
(**V**) O Conjunto das Partes de C tem 16 elementos **(2^4)** (**V**) B tem 8 subconjuntos **(2^3)**

OBS: Nos conjunto A, existe o elemento {1} e o elemento 1. Um dos subconjuntos unitários de A é {1}. Por isso a relação de pertinência para o elemento e de inclusão para o subconjunto. O mesmo ocorre para {3,4} elemento e {3,4} subconjunto de C. No conjunto B o Ø é elemento e subconjunto de todos os conjuntos.

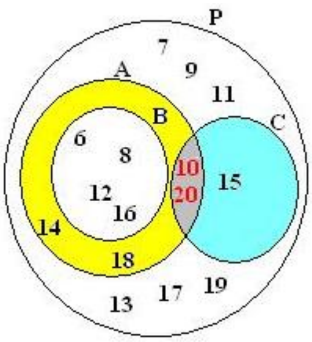
2. (PUC) Considere os seguintes subconjuntos de números naturais:

N = {0,1,2,3,4,...}; **P** = { x ∈ |N / 6 ≤ x ≤ 20 }; **A** = { x ∈ P / x é par};

B = {x ∈ P / x é divisor de 48 }; **C** = { x ∈ P / x é múltiplo de 5}

O número de elementos do conjunto **(A - B) ∩ C** é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6



Solução. Descrevendo cada conjunto indicado, temos:
P = {6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20};
A (subconjunto de P) = {6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20};
B (subconjunto de P) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48};
C (subconjunto de P) = {10, 15, 20}

Logo, (A – B) ∩ C = {10, 14, 18, 20} ∩ {10, 15, 20} = {10, 20}.
Há 2 elementos.

3. (ITA) Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}:

(I) $\varnothing \in$ U e n(U) = 10 **(II)** $\varnothing \subset$ U e n(U) = 10 **(III)** 5 ∈ U e {5} ⊂ U **(IV)** {0,1,2,5} ∩ {5} = 5.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s):

a) apenas I e III b) apenas II e IV **c)** apenas II e III d) apenas IV e) todas as afirmações.

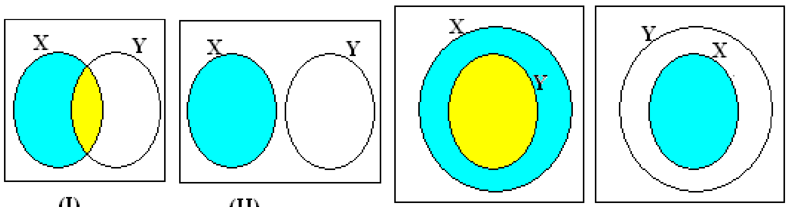
Solução. Observando os conceitos de elemento, conjunto, suas operações e relações, temos:

(I) Falsa. O conjunto vazio possui relação de inclusão (está contido) e não de pertinência.
(II) <u>Verdadeira</u>. Relação de inclusão entre o conjunto vazio e U, com 10 elementos.
(III) <u>Verdadeira</u>. 5 é elemento (pertinência) e {5}, subconjunto unitário (inclusão).
(IV) Falsa. A Interseção entre dois conjuntos é um conjunto. Logo {0,1,2,5} ∩ {5} = {5}.

4. (UNIFOR) Se X e Y são dois conjuntos não vazios, então **(X – Y)** ∪ **(X ∩ Y)** é igual a:

a) Ø **b)** X c) Y d) X ∩ Y e) X ∪ Y

Solução. Pela definição, o conjunto (X – Y) possui elementos que somente pertencem a X. O conjunto (X ∩ Y) possui elementos que pertencem a X e a Y. Logo, na união só haverá elementos de X. Observe as representações possíveis.

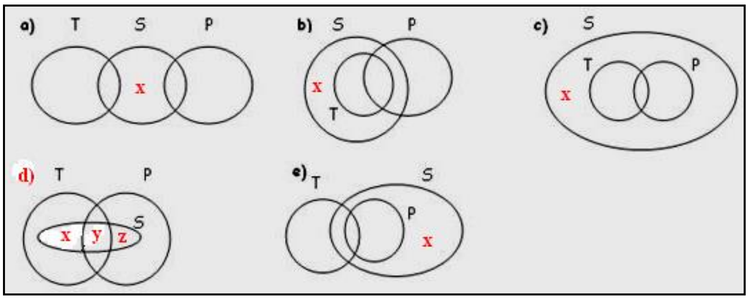


(I) (II) (III) (IV)

- Em (I), há interseção entre X e Y. A união das partes pintadas será X;
- Em (II), não há interseção. Logo (X – Y) = X e X ∩ Y = Ø. A união será o próprio X;
- Em (III) Y é subconjunto de X. Logo X ∩ Y = Y. A união das partes pintadas será o X;
- Em (IV) X é subconjunto de Y. Logo, X – Y = Ø e X ∩ Y = X. A união será X.

5. **(UFF)** Os conjuntos S, T e P são tais que todo elemento de S é elemento de T ou P. O diagrama que pode representar esses conjuntos é:

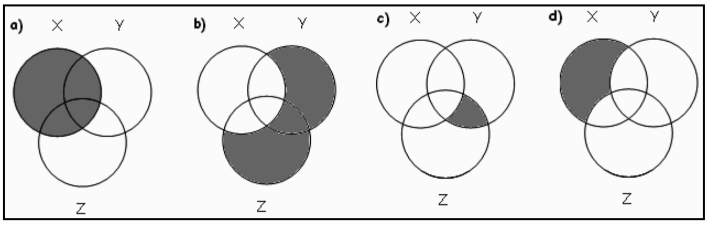
Solução. Como todo elemento de S precisa pertencer a T ou P, basta que seja encontrado um único elemento x є S que não esteja em T nem P para que a representação seja falsa. Nos diagramas esse elemento está indicado em (a), (b), (c) e (e). O conjunto S está contido em T ∪ P. Qualquer elemento de S pertencerá a T (no caso x) ou P (no caso z) ou a ambos (no caso y).



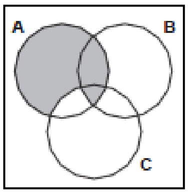
6. **(UFRN)** As figuras a seguir representam diagramas de Venn dos conjuntos X, Y e Z. Marque a opção em que a região hachurada representa o conjunto Y ∩ (Z-X).

Solução. O conjunto (Z – X) possui elementos que pertencem a Z, mas não a X. Os elementos de (Y ∩ (Z – X) pertencem a Y e (Z – X) simultaneamente.

Esta opção está representada na letra (c).



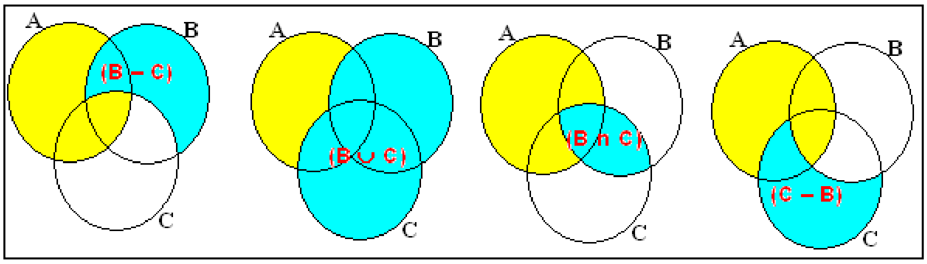
7. Com relação a parte sombreada do diagrama, é correto afirmar que:



a) A – (B – C) b) A – (B ∪ C)

c) A – (B ∩ C) **d)** A – (C – B) e) Nenhuma das respostas anteriores.

Solução. Em todas as opções a última operação a ser realizada é a diferença. Analisando somente as primeiras operações (em azul) e a diferença (em amarelo) verifica-se que a representação em amarelo relacionada com a da figura é da letra (D).



8. **(**UFPB) A metade do número $2^{21} + 4^{12}$ é:

a) $2^{20} + 2^{23}$ b) $2^{21/2} + 4^5$ c) $2^{12} + 4^{21}$ d) $2^{20} + 4^6$ e) $2^{22} + 4^{13}$

Solução. Encontrar a metade é efetuar a divisão por 2. Observando as propriedades das potências e simplificando, temos:

$$\frac{2^{21}+4^{12}}{2} = \frac{2^{21}+(2^2)^{12}}{2} = \frac{2^{21}+2^{24}}{2} = \frac{2^{20+1}+2^{23+1}}{2} = \frac{2.2^{20}+2.2^{23}}{2} = \frac{2(2^{20}+2^{23})}{2} = 2^{20}+2^{23}.$$

9. O valor da expressão $\frac{0,5.10^3 - 2^{-1}.\sqrt[3]{1000}}{(1,3111...)^{-1}}$ é igual a:

a) 377 b) 590 c) 620 **d)** 649 e) 750

Solução. Simplificando o numerador: $\frac{\frac{1}{2}.10^3 - \frac{1}{2}.\sqrt[3]{10^3}}{(1,3111...)^{-1}} = \frac{\frac{1000}{2} - \frac{1}{2}.10}{(1,3111...)^{-1}} = \frac{500-5}{(1,3111...)^{-1}} = \frac{495}{(1,3111...)^{-1}}$.

O denominador exibe uma dízima. Utilizando a técnica para encontrar a fração geratriz, temos:

$$\begin{cases} x = 1,3111... \\ 10x = 13,111... \\ 100x = 131,111 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x = 13,111... \\ 100x = 131,111 \end{cases} \Rightarrow 100x - x = 131 - 13 \Rightarrow 90x = 118 \Rightarrow x = \frac{118}{90} = \frac{59}{45}.$$

Substituindo na expressão, temos:

$$\frac{\frac{1}{2}.10^3-\frac{1}{2}.\sqrt[3]{10^3}}{(1{,}3111...)^{-1}}=\frac{\frac{1000}{2}-\frac{1}{2}.10}{(1{,}3111...)^{-1}}=\frac{500-5}{(1{,}3111...)^{-1}}=\frac{495}{(1{,}3111...)^{-1}}=$$
$$\frac{495}{\left(\frac{59}{45}\right)^{-1}}=\frac{495}{\frac{45}{59}}=495.\frac{59}{45}=(11).(59)=649$$

10. (UNIFOR) Simplificando- se a expressão $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, obtém-se:

a) $\sqrt{2}-2$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ d) $3\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{2}$

Solução. Igualando os denominadores e resolvendo, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=$$
$$\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}++2+\sqrt{2}}{(\sqrt{2})(2-1)}=\frac{5}{\sqrt{2}.(1)}=\frac{5}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

11. Escreva em ordem crescente os números reais $x=\frac{0{,}3}{0{,}025}$, $y=\sqrt[3]{\sqrt{512}}$ e $z=8^{-0{,}666...}$.

Solução. Simplificando ao máximo cada termo para comparação, temos:

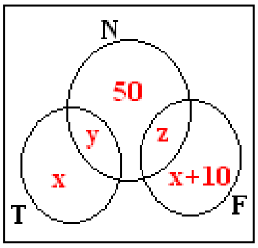
i) $x=\frac{0{,}3}{0{,}025}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{25}{1000}}=\frac{3}{10}.\frac{1000}{25}=(3).(4)=12$. **ii)** $y=\sqrt[3]{\sqrt{512}}=\sqrt[6]{2^9}=\sqrt[6]{2^6.2^3}=2.\sqrt[6]{2^3}=2.\sqrt{2}\cong 2(1{,}4)=2{,}8$.

iii)
$$\begin{cases} z=8^{-0{,}666...} \\ \begin{cases} a=0{,}666... \\ 10a=6{,}6666 \end{cases} \Rightarrow 10a-a=6 \Rightarrow a=\frac{6}{9}=\frac{2}{3} \Rightarrow z=8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(2^3)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2^6}}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}=0{,}25 \end{cases}$$

Logo, z < y < x.

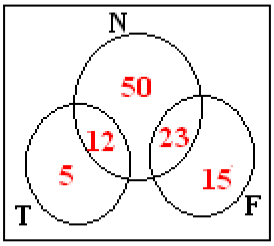
12. (UFRJ) Um clube oferece a seus associados aulas de três modalidades de esporte: natação, tênis e futebol. Nenhum associado pode se inscrever simultaneamente em tênis e futebol, pois, por problemas administrativos, as aulas destes dois esportes serão dadas no mesmo horário. Encerradas as inscrições, verificou-se que: dos 85 inscritos em natação, 50 só farão natação; o total de inscritos para as aulas de tênis foi de 17 e, para futebol, de 38; o numero de inscritos só para as aulas de futebol excede em 10 o numero de inscritos só para as de tênis. Quantos associados se inscreveram simultaneamente para aulas de futebol e natação?

Solução. O diagrama não apresenta interseção entre aulas de tênis e futebol. Considerando "y" o número de alunos inscritos em natação e tênis, "z" o número de alunos inscritos em natação e futebol, "x" o número de alunos inscritos somente em tênis, temos:

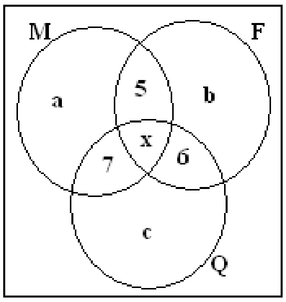


$$\begin{cases} 50+y+z=85 \\ x+y=17 \to x(-1) \\ z+x+10=38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=85-50 \\ -x-y=-17 \\ z+x=38-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=85-50 \\ -x-y=-17 \\ z+x=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=35 \\ z-y=11 \end{cases} \Rightarrow 2z=46 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z=\frac{46}{2} \Rightarrow z=23$$
$$\begin{cases} \text{i) } x=28-23=5 \\ \text{ii) } y=35-23=12 \end{cases}$$

O número de inscritos ao mesmo tempo em futebol e natação é 23. Observe como ficou o diagrama com todas as informações.



13. (UFPE) Os alunos de uma turma cursam alguma(s) dentre as disciplinas Matemática, Física e Química. Sabendo que:
- o número de alunos que cursam Matemática e Física excede em 5 o número de alunos que cursam as três disciplinas;
- existem 7 alunos que cursam Matemática e Química, mas não cursam Física;
- existem 6 alunos que cursam Física e Química, mas não cursam Matemática;
- o número de alunos que cursam exatamente uma das disciplinas é 150;
- o número de alunos que cursam pelo menos uma das três disciplinas é 190.



Quantos alunos cursam as três disciplinas?

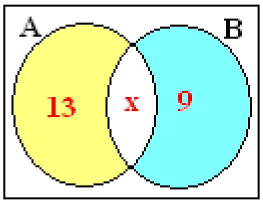
Solução. O diagrama representa as informações, considerando “a”, “b” e “c”, respectivamente o número de alunos que cursam exclusivamente Matemática, Física e Química. Utilizando as outras informações, temos:

$$\begin{cases} a+b+c=150 \\ a+(5+6+7)+b+c+x=190 \end{cases} \Rightarrow 150+18+x=190 \Rightarrow x=190-168 \Rightarrow x=22.$$

14. Se A e B são conjuntos tais que n(A ∪ B) = 24, n(A – B) = 13 e n(B – A) = 9, então:

a) n(A ∪ B) – n(A ∩ B) = 20 b) n(A) – n(B) = n(A – B) c) n(A ∩ B) = 3

d) n(B) = 11 e) n(A) = 16



Solução. O total de elementos da união é 24. Este valor corresponde pela representação no diagrama por (13 + x + 9) = x + 22. Logo, o número de elementos da interseção é x = 24 – 22 = 2. Analisando as opções, temos:
(a) Falso. n(A ∪ B) – n(A ∩ B) = 24 – 2 = 22 ≠ 20.
(b) Falso. n(A) – n(B) = (13 + 2) – (9 + 2) = 25 – 11 = 12 ≠ n(A – B) = 13.
(c) Falso. n(A ∩ B) = 2 ≠ 3.
(d) Verdadeiro. n(B) = 9 + 2 = 11.
(e) Falso. n(A) = 13 + 2 = 15 ≠ 16.

15. Num homicídio praticado na Rua X, a polícia fez as seguintes anotações, no boletim de ocorrência, sobre as pessoas encontradas no local do crime:
I. Havia 5 mulheres II. 5 pessoas usavam óculos III. 4 homens não usavam óculos
IV. 2 mulheres usavam óculos.

Considerando que todas as pessoas encontradas no local do crime são suspeitas, então quantos são os suspeitos?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 **e)** 12

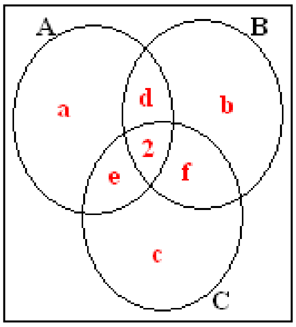
Solução. Organizando as informações em um quadro e efetuando as operações apropriadas, temos:

	Usavam óculos	Não usavam óculos	Total
Homens	**5 – 2 = 3**	**4**	**3 + 4 = 7**
Mulheres	**2**	**5 – 2 = 3**	**5**
Total	**5**	**4 + 3 = 7**	**7 + 5 = 12**

16. Denotemos por *n*(X) o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam A, B e C conjuntos tais que ***n*(A ∪ B) = 8**, ***n*(A ∪ C) = 9**, ***n*(B ∪ C) = 10**, ***n*(A ∪ B ∪ C) = 11** e ***n*(A ∩ B ∩ C) = 2**.

Então, *n*(A) + *n*(B) + *n*(C) é igual a:

a)11 b) 14 c)15 **d)** 18 e) 25



Solução. Organizando no diagrama, temos:

$$\begin{cases} a+d+e+2+b+f=8 \to x(-1) \\ a+d+e+2+b+c+f=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-d-e-2-b-f=-8 \\ a+d+e+2+b+c+f=11 \end{cases} \Rightarrow c=3$$
$$\begin{cases} a+d+e+2+c+f=9 \to x(-1) \\ a+d+e+2+b+c+f=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-d-e-2-c-f=-9 \\ a+d+e+2+b+c+f=11 \end{cases} \Rightarrow b=2$$
$$\begin{cases} d+e+2+b+c+f=10 \to x(-1) \\ a+d+e+2+b+c+f=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -d-e-2-b-c-f=-10 \\ a+d+e+2+b+c+f=11 \end{cases} \Rightarrow a=1.$$

Temos: (a + b + c) + 2 + (d + e + f) = 11 ⇒ (d + e + f) = 11 – 2 – 6 = 3.

***Logo, n*(A)+*n*(B)+*n*(C) = (a+d+e+2) + (b+d+2+f) + (e+2+f+c) = (a+b+c) + (2+2+2) + 2.(e+f+c)**

= 6 + 6 + 2(3) = 18.

17. Coloque (V) ou (F) nas afirmações.

(**V**) Um número racional é sempre um número real.

Justificativa: O conjunto dos números racionais é subconjunto do conjuntos dos números reais.

(**F**) $\left(3\sqrt{8}\right).\left(3\sqrt{2}\right)$ é um número irracional.

Justificativa: $\boxed{\left(3\sqrt{8}\right).\left(3\sqrt{2}\right) = 9\sqrt{8.2} = 9\sqrt{16} = 9.4 = 36 \in Q}$.

(**F**) $\dfrac{3{,}2444....}{2} \in IN$. **Justificativa:**

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{cases} 10x = 32{,}444... \\ 100x = 324{,}444... \end{cases} \Rightarrow 100x - 10x = 324 - 32 \Rightarrow x = \dfrac{292}{90} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dfrac{3{,}2444...}{2} = \dfrac{\frac{292}{90}}{2} = \dfrac{292}{90}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{146}{90} = \dfrac{73}{45} \notin IN \end{array}}$$.

(**V**) $(3{,}0303...).\left(\dfrac{1}{11}\right)^{-1} > 33$. **Justificativa:**

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3{,}0303... \\ 100x = 303{,}0303... \end{cases} \Rightarrow 100x - x = 303 - 3 \Rightarrow x = \dfrac{300}{99} = \dfrac{100}{33} \Rightarrow \\ \Rightarrow (3{,}0303...).\left(\dfrac{1}{11}\right)^{-1} = \dfrac{100}{33}.11 = \dfrac{100}{3} \cong 33{,}333... > 33 \end{array}}$$.

(**V**) $\pi \in (IR \cap Q) \cup \left(Q^c\right)$. **Justificativa:**

$$\boxed{\begin{cases} IR \cap Q = Q \\ \left(Q^c\right) = I(\text{irracionais}) \end{cases} \Rightarrow Q \cup I = IR}$$.